EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….039**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+i}{2+i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(3,2,1)$ la planul $x+2y+3z-4=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2=4x$ în punctul $P(4,4)$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1,1)$, $M(2,2)$ și $N(-3,3)$.

(2p) **e)** Să se determine produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{w}=4\vec{i}-3\vec{j}$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$(\cos 6+i\cdot\sin 6)^{10}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f=X^3+1$ la polinomul $g=X^2+X+1$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_{12}$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{0}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+7$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(10)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}+2^x=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f=X^3-3X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sin x+3e^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane, fiecare matrice din M având numai elemente *distincte* din mulțimea $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M$ şi că $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \notin M$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

(4p) **c)** Să se găsească o matrice $A \in M$, astfel încât $\det(A) \neq 0$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $D \in M$, atunci $rang(D) \in \{2, 3\}$.

(2p) **f)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

(2p) **g)** Să se arate că, mulțimea M conține cel puțin 18 matrice cu determinantul egal cu 0 .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 3}$ şi $(b_n)_{n\geq 3}$, definite prin

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}}}, \quad b_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n+2}}}},$$

$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 3$.

(4p) **a)** Să se verifice că $a_n < b_n,\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 3$.

(4p) **b)** Să se arate că $b_3 < 2$.

(4p) **c)** Să se arate că $a_4 > 1{,}9$.

(2p) **d)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că

$2^{n+1} > n+3,\quad \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$.

(2p) **e)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 3}$ este strict crescător şi şirul $(b_n)_{n\geq 3}$ este strict descrescător.

(2p) **f)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 3}$ şi $(b_n)_{n\geq 3}$ sunt convergente .

(2p) **g)** Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 3}$ şi $(b_n)_{n\geq 3}$ au aceeaşi limită şi limita lor este un număr din intervalul $(1{,}9;\ 2)$.